TS Partie II : comprendre

Chapitre 4 physique

Application des lois de Newton et des lois de Kepler

Pré requis : Lois de Newton, poids, vitesse, accélération

Compétences :

- Mettre en œuvre les lois de Newton pour étudier les mouvements dans des champs de pesanteur et électrostatiques uniformes.
- Démontrer que, dans l'approximation des trajectoires circulaires, le mouvement d'un satellite, d'une planète, est uniforme. Établir l'expression de sa vitesse et de sa période.
- Connaître les trois lois de Kepler ; exploiter la troisième dans le cas d'un mouvement circulaire.

I. Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

1) Champ uniforme

La Terre créé en son voisinage un **champ de pesanteur noté** $\vec{g}$.

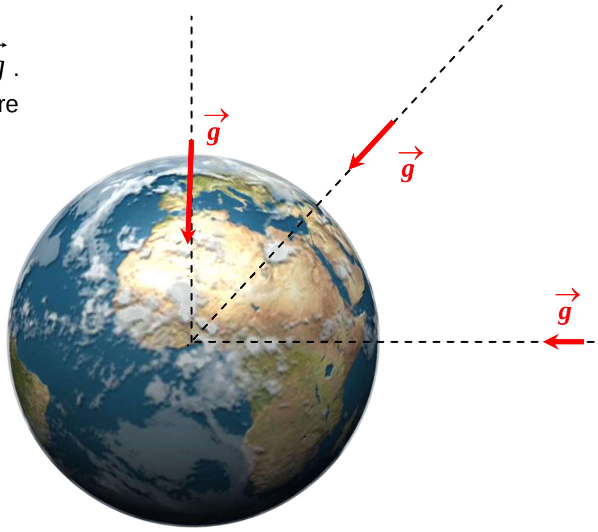
De ce fait toute masse plongée dans ce champ voit apparaître une force qui l'attire vers le centre de la Terre et d'intensité :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}} \qquad \begin{array}{|l} P \text{ en } N \\ m \text{ en } kg \\ g \text{ en } N/kg \end{array}$$

Les caractéristiques du champ de pesanteur terrestre sont :

- direction : radiale
- sens : vers le centre de la Terre
- intensité : g = 9,8 $N{\cdot}kg^{-1}$

($g = G\,M_T / R_T^{\,2}$)



⇧ *Figure 1 : Champ non uniforme*

Donc, à l'échelle de la Terre, le champ de pesanteur n'est pas uniforme.

Néanmoins, à **l'échelle humaine**, ce champ peut raisonnablement être **considéré comme uniforme**.

2) Mouvement dans le champ de pesanteur

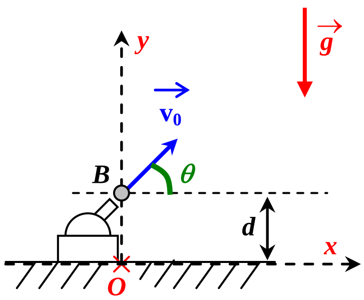
TP

Une chute libre, c'est lorsque le solide n'est soumis qu'à son poids.

Dans l'air, un objet en chute, est soumis à la poussée d'Archimède PA (PA = rair V g) et à la force de frottements fluide, exercées par l'air , mais ces forces sont faibles et négligeables par rapport au poids dans certaines conditions : faible hauteur (quelques mètres) et faible vitesse.

Considérons un boulet de canon tiré au point *B* de coordonnées (*0* ; *d*) à la date $t_0 = 0$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. La position du boulet est repéré à chaque instant par son centre de gravité *G* dans le repère (O, x, y) = système



⇧ *Figure 2 : Tir d'un boulet B*

D'après la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{dt} = \frac{d\,(m\vec{v})}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\vec{F} = \frac{d\,m}{dt}\cdot\vec{v} + m\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

Or la masse *m* étant constante, on aura :

$$\Sigma\vec{F} = 0\cdot\vec{v} + m\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt} = m\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

D'où : $\boxed{\Sigma\vec{F} = m\vec{a}}$

En supposant que **le boulet est en chute libre**, on aura alors : $\Sigma\vec{F} = \vec{P} = m\vec{a}$

$$\Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Donc : $\vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

Comme le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, **le vecteur vitesse est une primitive du vecteur accélération**. Ainsi, **on intègre le vecteur accélération pour trouver le vecteur vitesse :**

$$\vec{v}\begin{pmatrix} cste \\ -gt + cste' \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \text{Position} \arrow[r, bend left, "\textit{Dérivation}"] & \text{Vitesse} \arrow[l, bend left, "\textit{Intégration}"] \arrow[r, bend left, "\textit{Dérivation}"] & \text{Accélération} \arrow[l, bend left, "\textit{Intégration}"] \end{tikzcd}$$

Or à t = 0, on a $\vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cste \\ -g \times 0 + cste' \end{pmatrix}$

donc $cste = v_0 \cos\theta$ et $cste' = v_0 \sin\theta$.

D'où : $\vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{pmatrix}$

Comme le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps, **le vecteur position est une primitive du vecteur vitesse**. Ainsi, **on intègre le vecteur vitesse pour trouver le vecteur position :**

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \times t + cste \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \times t + cste' \end{pmatrix}$$

Or à t = 0, le boulet G est en B $(0 ; d)$
donc $cste = 0$ et $cste' = d$

D'où : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \times t + 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \times t + d \end{pmatrix}$

Ainsi **les équations horaires** définissant le mouvement de ce boulet sont :

Pour l'accélération :	**Pour la vitesse :**	**Pour la position :**
$a_x = 0$	$v_x = v_0 \cos\theta$	$x(t) = v_0 \cos\theta \times t$
$a_y = -g$	$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$	$y(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin\theta \times t + d$
$a_z = 0$	$v_z = 0$	$z(t) = 0$

A noter :

- **Ce mouvement est plan car l'une des coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ ne dépend pas de z.**
- **Lorsque la masse du mobile est constante on a alors :** $\boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Leftrightarrow \Sigma\vec{F} = m\vec{a}}$

En exprimant y en fonction de x on obtient l'équation de la trajectoire $y(x)$:

$$x(t) = v_0 \cos\theta \times t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

En remplaçant dans $y(t)$, on obtient : $y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} + d$

Soit, en simplifiant : $$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2 \times v_0^2 \cos^2\theta} \times x^2 + \tan\theta \times x + d}$$

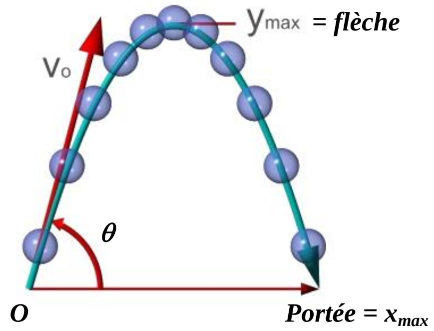
Equation de la trajectoire

A noter :

Cette trajectoire est une parabole car son équation est du type : $y(x) = ax^2 + bx + c$

Figure 3⇨

Trajectoire parabolique



Cas particulier : chute verticale sans vitesse initiale
Trajectoire : arc de parabole
Référentiel, système, forces, application de la 2ème loi de Newton, trouver v, trouver le vecteur position

II. Mouvement dans un champ électrique uniforme

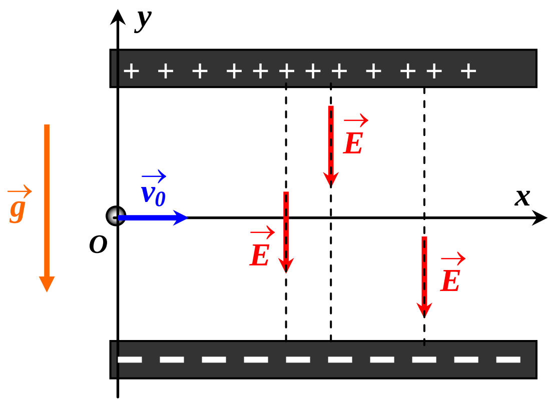
Soit une particule ponctuelle G de charge q et de masse m placée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$.

Système étudié : particule G

Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen

Inventaire des forces extérieures :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la force électrique $\vec{F_e} = q \cdot \vec{E}$
- les forces de frottement de l'air $\vec{f} = k \cdot \vec{v}$
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho_{air} \cdot V \cdot \vec{g}$



⇧ *Figure 4 :*

Particule chargée dans un champ électrique

Avec V le volume de la particule, v sa vitesse, k une constante et ρ_{air} la masse volumique de l'air.

Questions :

a) En supposant que cette particule soit un électron de masse m = 9,1·10^{-31} kg et de charge électrique q = - 1,6·10^{-19} C, déterminer les caractéristiques du poids de l'électron et celles de la force électrique qu'il subit sachant que E = 10 000 $V{\cdot}m^{-1}$

b) Que penser de l'influence du poids de l'électron sur son mouvement dans le champ électrique ?

c) Que penser de la poussée d'Archimède que subit l'électron ? Même question pour les forces de frottements.

d) Faire l'inventaire des forces.

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_e} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -qE \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

D'où : $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{-qE}{m} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{qE}{m} \end{pmatrix}$

En intégrant le vecteur accélération, on trouve le vecteur vitesse :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} cste \\ -\dfrac{qE}{m}\cdot t + cste' \end{pmatrix}$$

Or à t = 0, le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v_0}\begin{pmatrix} cste \\ -\dfrac{qE}{m}\times 0 + cste' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cste \\ cste' \end{pmatrix}$

D'autre part, d'après l'énoncé, le vecteur vitesse initial s'écrit aussi $\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où : $cste = v_0$ et $cste' = 0$

Donc $\vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \\ -\dfrac{qE}{m}\cdot t \end{pmatrix}$

En intégrant le vecteur vitesse, on trouve le vecteur position :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} v_0 t + cste \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}\cdot t^2 + cste' \end{pmatrix}$$

Or à t = 0, le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 0\times t + cste \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}\times 0^2 + cste' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cste \\ cste' \end{pmatrix}$

Et d'après l'énoncé la particule est en O à l'origine du temps, donc $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où $cste = cste' = 0$

Donc : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} v_0 t \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}\cdot t^2 \end{pmatrix}$

Ainsi, **les équations horaires de la position sont** :

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = -\frac{qE}{2m}\times t^2$$

Et l'équation de la trajectoire est :

$y(x) = -\dfrac{qE}{2m \cdot v_0^{\ 2}} \times x^2$ Cette trajectoire est aussi une parabole car son équation est du type : $y(x) = ax^2 + bx + c$

III. Mouvement des planètes et satellites en orbite circulaire

Rappels :

Le vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet : $\vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}$

avec a_N **l'accélération normale** et a_T **l'accélération tangentielle.**

- Si a_N est nulle, le mouvement est rectiligne.
- Si a_T est nulle, le mouvement est uniforme.

Définition :

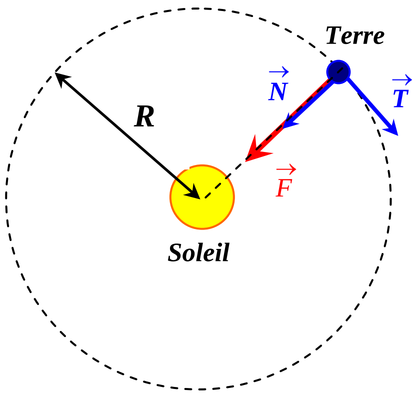
L'accélération dans la base de Frenet s'écrit : $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}}$

Avec $\boxed{a_N = \dfrac{v^2}{R}}$ **et** $\boxed{a_T = \dfrac{dv}{dt}}$

1) Nature du mouvement

Le mouvement d'un objet en orbite autour d'un astre est toujours une ellipse. Dans certains cas cette ellipse est un cercle ou s'en approche fortement, comme par exemple pour l'orbite de la Terre dans le référentiel héliocentrique.

⇩ *Figure 5 : Orbite de la Terre*



Considérons le mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil :

Système étudié : Terre de masse M_T

Référentiel d'étude : héliocentrique supposé galiléen

Inventaire des forces extérieures :

Force de gravité $\vec{F}$ exercée par le Soleil sur la Terre.

Comme la masse de la Terre est constante, d'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = \vec{F} = M_T \cdot \vec{a}$$

Or la force de gravité exercée par le Soleil de masse M_S sur la Terre a pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N}}$$

G = constante de gravitation universelle

F en N
M en kg
R en m
G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

Analyse dimensionnelle pour trouver les unités de G : dim G = (on retrouve Nm^2kg^{-2})

D'où : $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N} = M_T \left(a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2}} \cdot \vec{N} = \boxed{M_T a_N} \cdot \vec{N} + \boxed{M_T a_T} \cdot \vec{T}$$

Donc, **par identification** : $\begin{cases} M_T a_N = G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \\ M_T a_T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_N = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2} \\ a_T = 0 \end{cases}$

Or si $a_T = 0$ alors $\dfrac{dv}{dt} = 0$ car **par définition** $a_T = \dfrac{dv}{dt}$

Et si $\dfrac{dv}{dt} = 0$ cela implique que $v = \left\| \vec{v} \right\| = cste.$

Ainsi, si la trajectoire d'un objet en orbite gravitationnelle est circulaire alors son mouvement est uniforme.

2) Détermination de la vitesse

D'après la partie précédente on a :

$$a_N = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$$

Or, **par définition** : $a_N = \dfrac{v^2}{R}$

D'où : $\dfrac{v^2}{R} = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{G \cdot \dfrac{M_S}{R}}}$

v en m/s
M_S en kg
R en m
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

3) Période de révolution

La période de révolution T est le temps nécessaire à l'objet (ici la Terre) pour faire un tour sur son orbite.
La longueur L d'une orbite est égale au périmètre du cercle, soit : $L = 2\pi R$

D'où : $v = \dfrac{d}{\Delta t} = \dfrac{L}{T} = \dfrac{2\pi R}{T}$

En utilisant l'expression du III.2 :

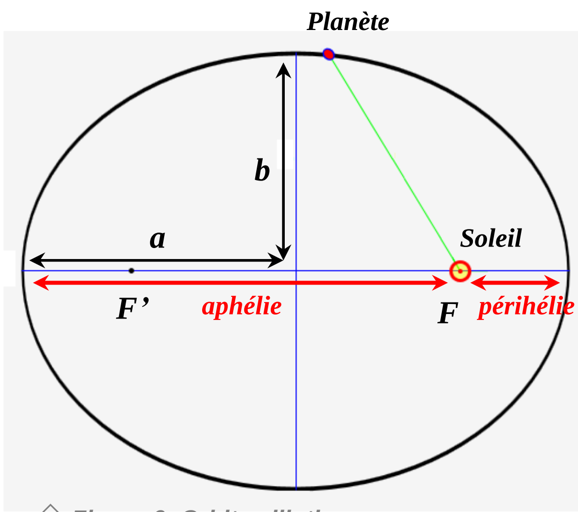
$$\sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}}$$

IV. Les lois de Kepler

Première loi : loi des orbites (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

a est le **demi-grand axe** et ***b*** est le **demi-petit axe**.

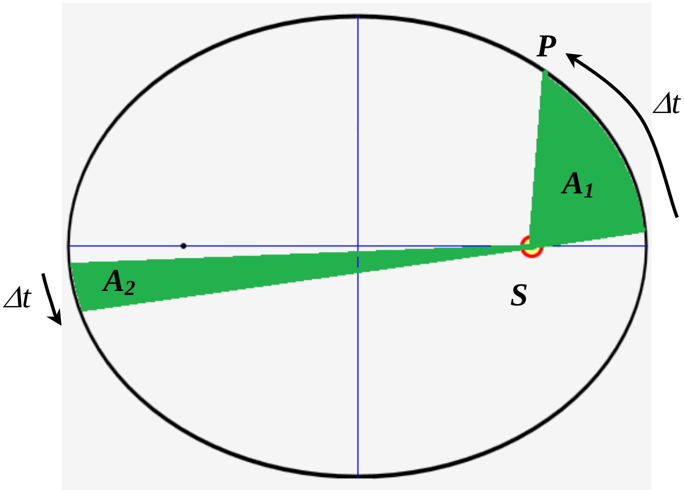


⇧ *Figure 6: Orbite elliptique*

Deuxième loi : loi des aires (1609)
Le segment [SP] qui relie le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

A noter :

Cette loi implique que plus la planète s'approche du Soleil plus sa vitesse augmente. De même, plus elle s'en éloigne, plus sa vitesse diminue.



⇧ *Figure 7: Loi des aires : $A_1 = A_2$*

Troisième loi : loi des périodes (1618)

Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de son orbite.

$$\boxed{T^2 = k \times a^3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

Exploitation pour un mouvement circulaire (vu dans 3) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM_S}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}}$$

⇧ *Figure 8 : Johannes Kepler (1571-1630)*

Ainsi, quelque soit la planète *P* de période de révolution *T* en orbite autour du Soleil à une distance *R*, le rapport du carré de sa période sur le cube du rayon de son orbite ne dépend que de la masse du Soleil.

Ainsi : $\frac{T_{Terre}^2}{R_{Terre}^3} = \frac{T_{Mars}^2}{R_{Mars}^3} = \frac{T_{Halley}^2}{a_{Halley}^3} = \ldots = \frac{4\pi^2}{GM_S}$