Chapitre 2 : la musique et les nombres

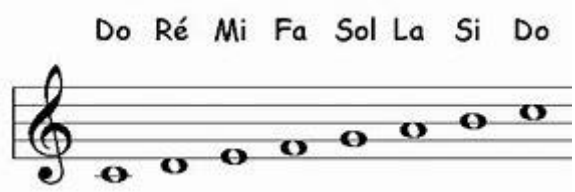
Savoir- faire :

- *Calculer des puissances et des quotients en lien avec le cycle des quintes.*
- *Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.*
- *Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.*

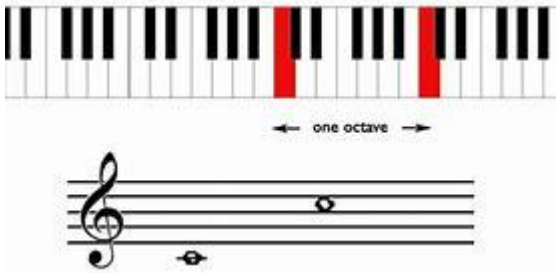
I) L'octave et la notion d'intervalle

En musique, un intervalle entre deux sons est défini par le rapport (et non la différence) de leurs fréquences fondamentales.

Deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 2/1 correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. L'intervalle qui les sépare s'appelle une octave.



http://www.fredericlaurent.fr/ecris-moi-la-musique-p221429.html



http://www.songsofthecosmos.com/encyclopedia_of_modern_music/O/octave.html

Ecouter : Fichier son « P4C2_227-octave »
Ecouter : Fichier son « P4C2_227-quinte »
Voir activité jouer la gamme

Exemple : fréquence de Do, f=100Hz,

1) Si la fréquence pour le ré est 112,5Hz, calculer 'intervalle entre le Do et le ré :

$$\frac{f\ ré}{f\ do} = \frac{112{,}5}{100} = 1{,}125 \text{ soit } 9/8$$

2) Calculer la fréquence du do à l'octave supérieur.
à l'octave suivant c'est donc f= 2 x 100 = 200Hz.

II) Les gammes

Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.

Les intervalles qui sonnent bien à l'oreille sont dit consonants (quarte, quinte…)

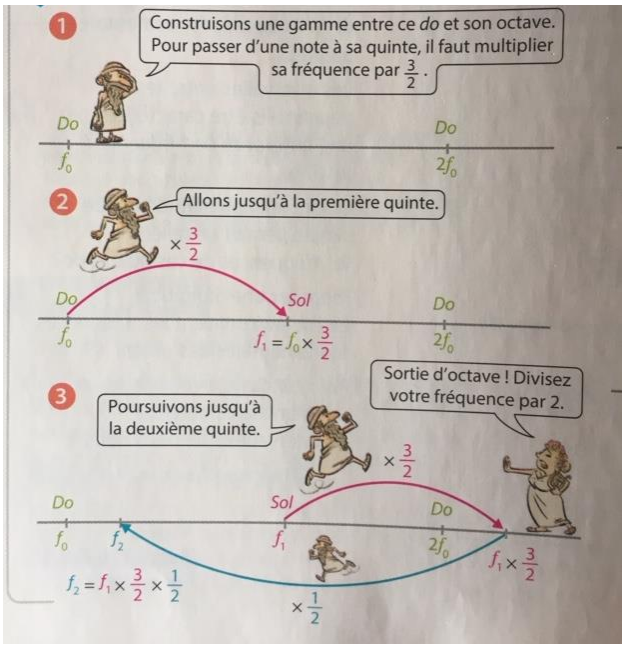
Dans l'Antiquité, la construction des gammes était basée sur des fractions simples, (2/1, 3/2, 4/3, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples étaient alors considérés comme les seuls à être consonants.

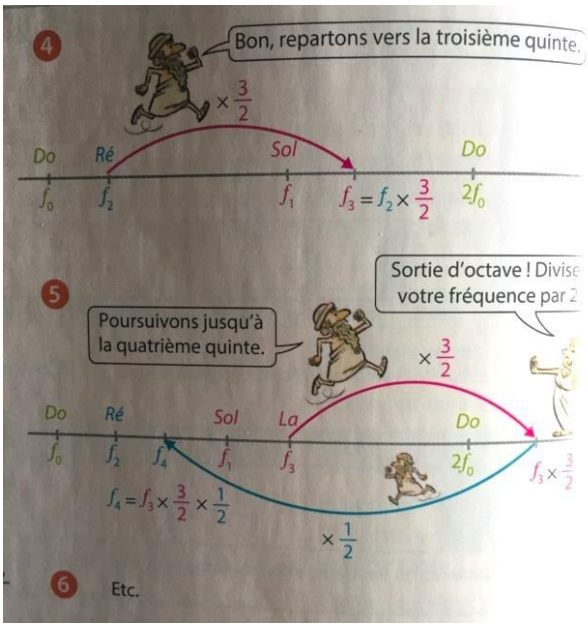
Une quinte est un intervalle entre deux fréquences de rapport 3/2. Les gammes dites de Pythagore sont basées sur le cycle des quintes.

https://www.vive-le-piano.com/intervalle/

1) Gamme de Pythagore (activité 2 p 228-229)Bordas

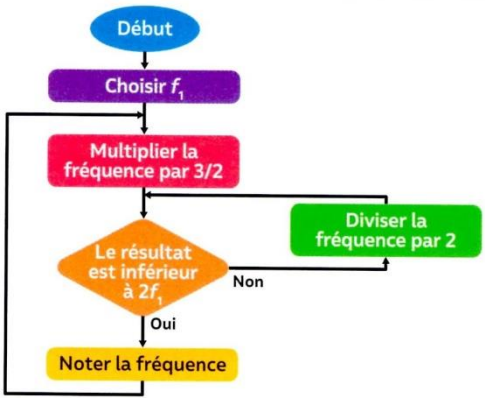
La quinte est la base de la gamme de Pythagore. Voici la construction :





Source : Hatier 1 ère p 198

Algorithme de calcul de fréquences de notes suivant un cycle des quintes (gamme de Pythagore)



Pour des raisons mathématiques, ce cycle des quintes ne « reboucle » jamais sur la note de départ. Cependant, les cycles de 5, 7 ou 12 quintes « rebouclent » presque.

Remarque : Si le cycle des quintes était fini, alors, au bout d'un certain nombre de quintes, on retomberait sur 2 (rapport de l'octave, à p octave près). On aurait donc : $(3/2)^n = 2^p$ soit $3n = 2^{n+p}$ avec n et p des entiers, ce qui est impossible car un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair.

Pour les gammes associées, l'identification de la dernière note avec la première impose que l'une des quintes du cycle ne corresponde pas exactement à la fréquence 3/2.

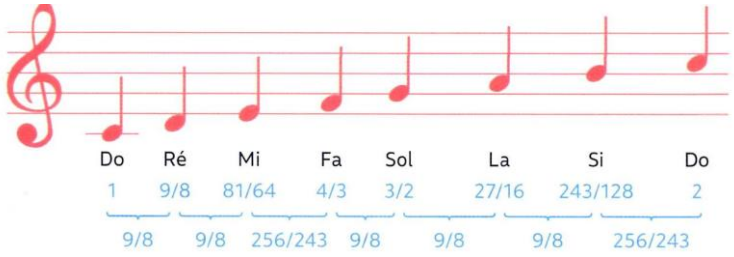
La dernière quinte sonne un peu faux. On l'appelle la quinte de loup.

Exercices : 4 p.235 ; 9 p.236 ; 13p.237 ; 15 p.238 ; 18 p.239

2) Gamme au tempérament égal

Activité 3 p.230-231 (Bordas)

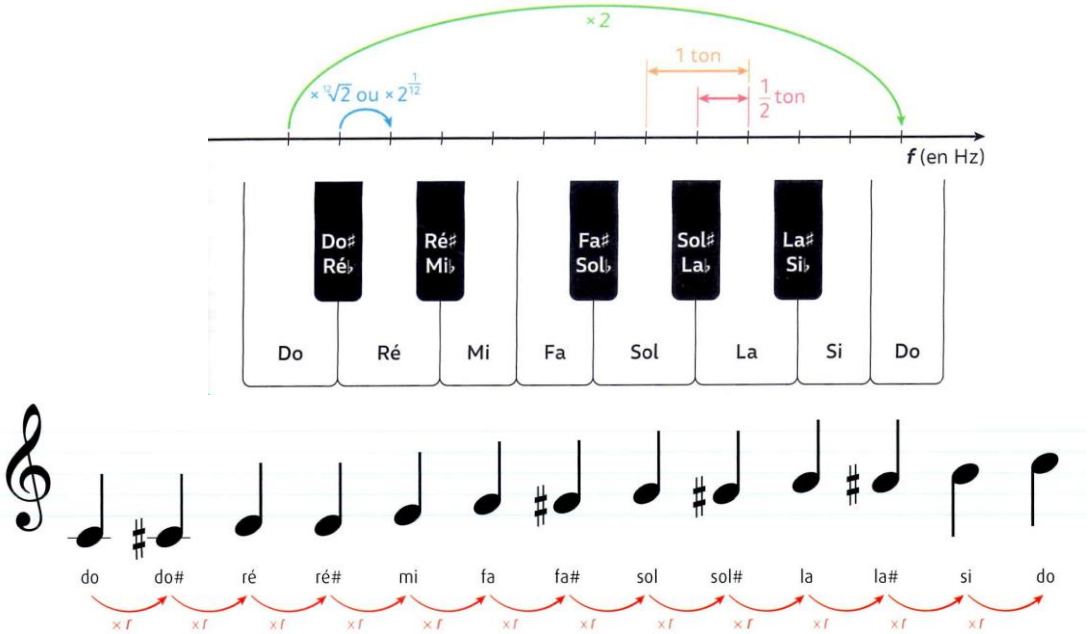
Les intervalles entre deux notes consécutives des gammes dites de Pythagore ne sont pas égaux, ce qui entrave la transposition. On déplace vers les graves ou les aigus la mélodie suivant l'instrument ou le registre de la voix.



La gamme de Pythagore est constituée de 5 « tons » (rapport de fréquences égal à 9/8) et 2 « demi-tons » (rapport 256/243).

La connaissance des nombres irrationnels (nombre qui ne peut pas s'exprimer sous forme d'une fraction de 2 nombres entiers) a permis, au XVIIe siècle, de construire des gammes à intervalles égaux.

La gamme est formée de 12 intervalles égaux appelés demi-tons. La valeur du rapport est la racine douzième de 2 : $\sqrt[12]{2} = 2^{1/12}$.



Exercices : 12 p.237 ; 14 p.238