CINEMATIQUE

La cinématique est l'étude mathématique du mouvement.

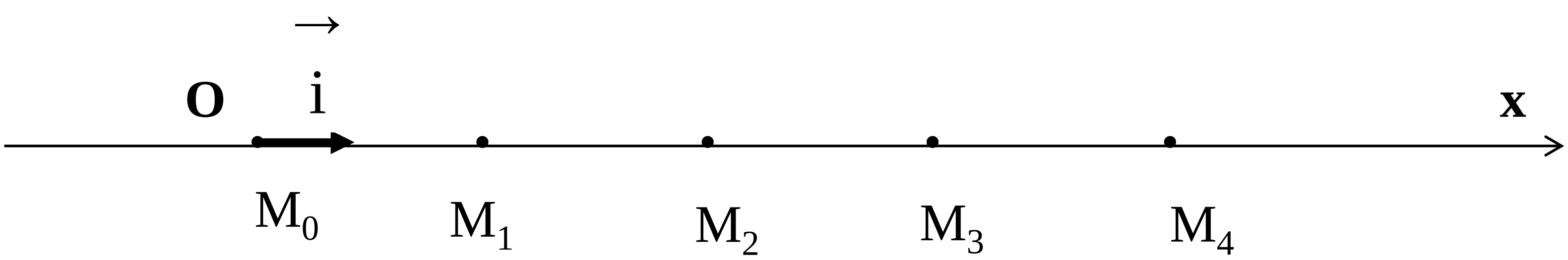
Comment décrire un mouvement de façon précise?

Comment en déduire la trajectoire, la vitesse du corps en mouvement à chaque instant?

Comment rendre compte de l'accélération ou de la perte de vitesse?

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

$\tau = \Delta t$ = durée « séparant » deux points successifs = 40 ms

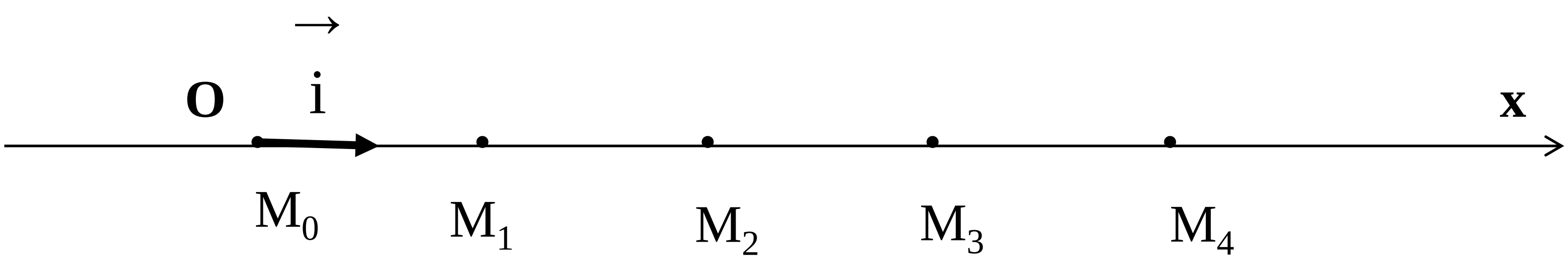


Mouvement rectiligne uniforme

Repère d'espace R(O, $\vec{i}$) défini par l'axe Ox. ($\|\vec{i}\|$= 1 cm)

Repère de temps : M en O (x= 0) à l'instant t = 0

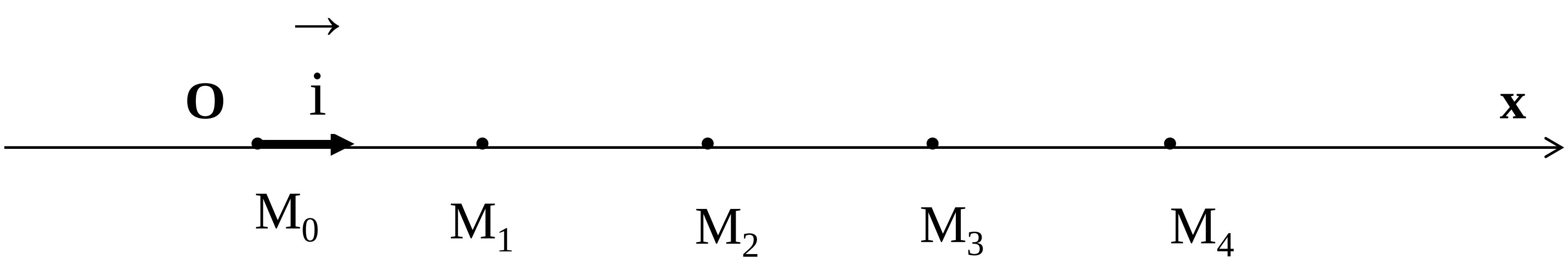
$\tau = \Delta t = 40$ ms $\quad\quad \|\vec{i}\| = 1$ cm



On peut maintenant repérer la position du mobile à un instant t par son abscisse x (t)…

Par exemple: à $t = 80$ ms $\overrightarrow{OM_2} = 4.\vec{i}$

Donc $OM_2 = 4$ cm



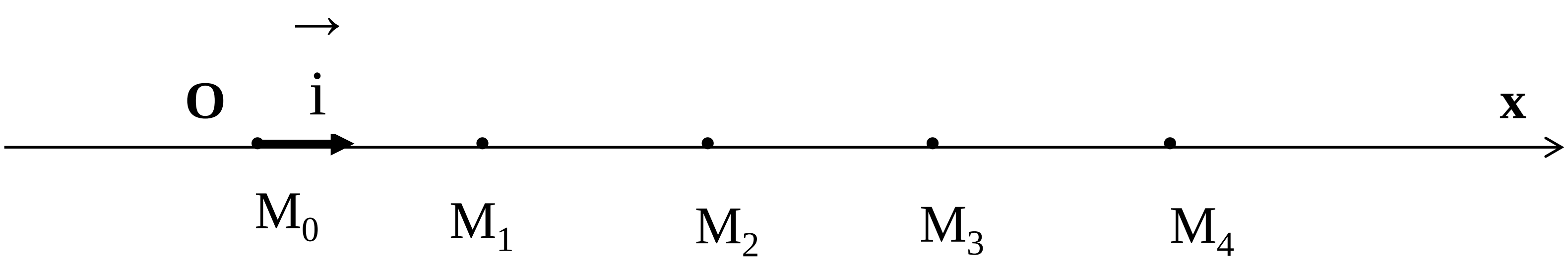
Ainsi, on obtient:

points	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
t (ms)	0	40	80	120	160
x (cm)	0	2	4	6	8

On voit que x est proportionnel à t:

$$x(t) = k \times t \quad \text{avec} \quad k = 50 \text{ cm.s}^{-1}$$

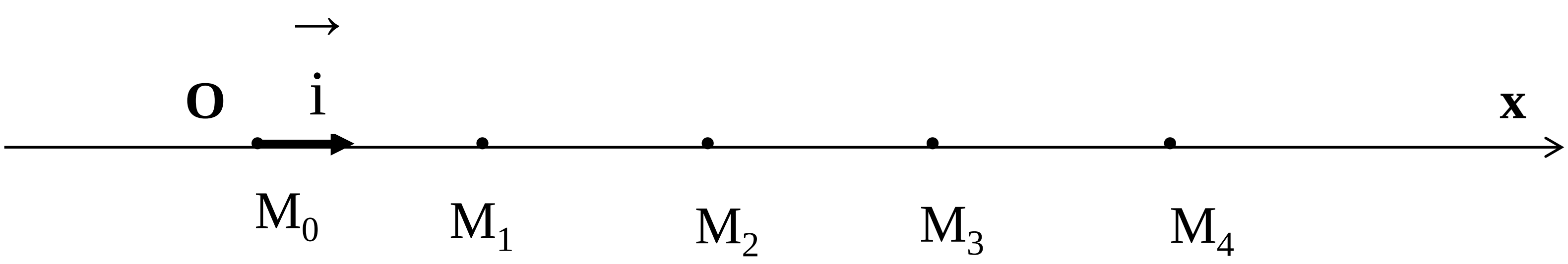
(k est effectivement une vitesse car il s'exprime ici en cm/s)



Notons donc $k = v$ et donc $x = v \times t = 50 \times t$

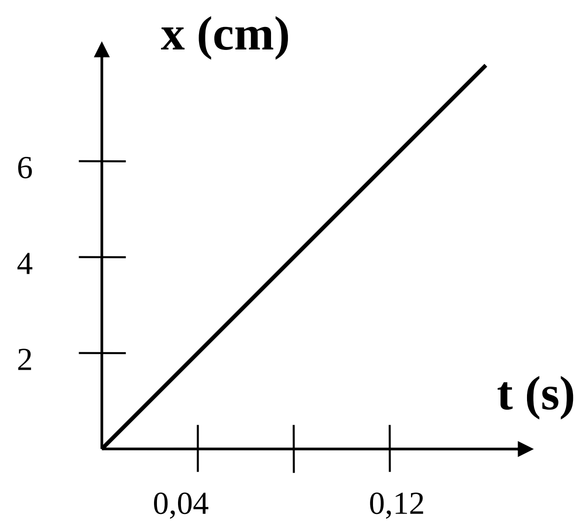
$x = 50 \times t$ (avec x en cm ; t en seconde)

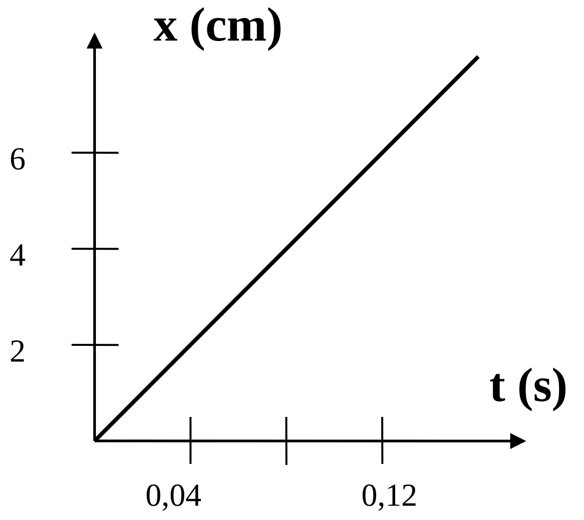
x(t) est appelée <u>loi horaire</u> : cette équation donne la position du mobile à chaque instant.



Loi horaire: $x = 50 \times t$

Traçons x en fonction du temps: x = f(t)





$$\mathbf{x\ (t) = k\times t = 50\times t = v\times t}$$

Ainsi le coefficient directeur de la droite est la vitesse

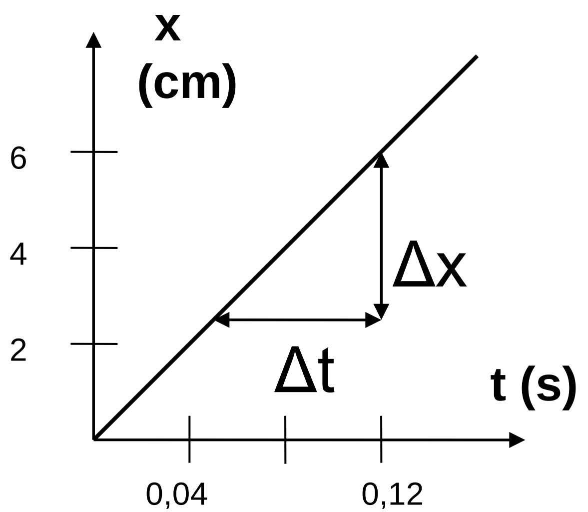
Mais c'est aussi la dérivée de la fonction x par rapport à t:

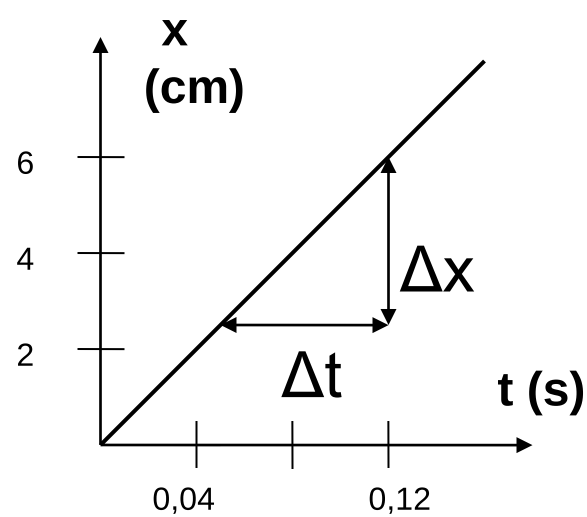
$$x\ (t) = 50\times t \quad \text{donc } x' = 50$$

Il semble donc que la vitesse soit la dérivée par rapport au temps de la loi horaire:

$$x = f(t) \quad \text{et} \quad v = f'(t)$$

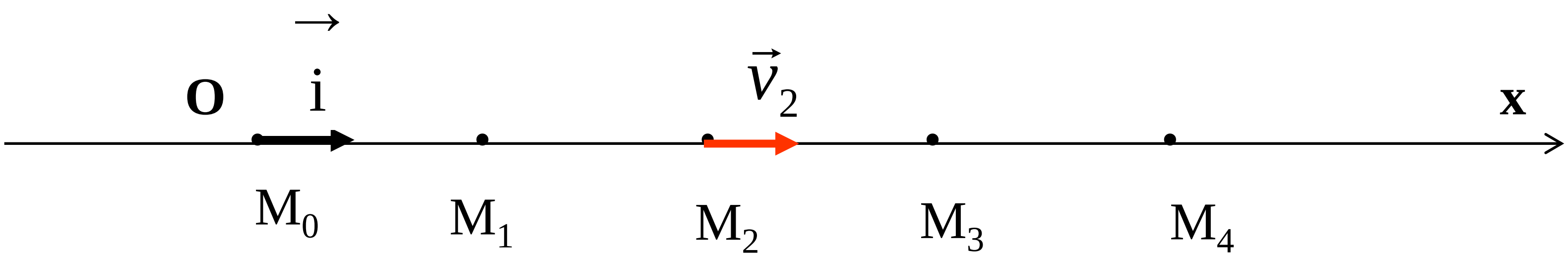
Résultat compréhensible, puisque la pente de la droite vaut par définition: $\Delta x \,/\, \Delta t$





$v = \Delta x / \Delta t$ la vitesse est bien la distance parcourue pendant la durée Δt

La vitesse est le taux de variation de x au cours du temps, soit, la dérivée de la fonction x(t) par rapport au temps.



Représentons enfin le vecteur vitesse en M_2 par exemple:

$\vec{v}_2$

- point d’application: point M_2
- direction: axe Ox
- sens: celui du déplacement
- valeur: $v_2 = 50$ cm.s^{-1}

soit, avec une échelle de 2 cm $\longleftrightarrow$ 100 cm.s^{-1} …

RESUME

Afin d’étudier le mouvement du mobile, nous avons donc:

- choisi un repère d’espace et un repère de temps

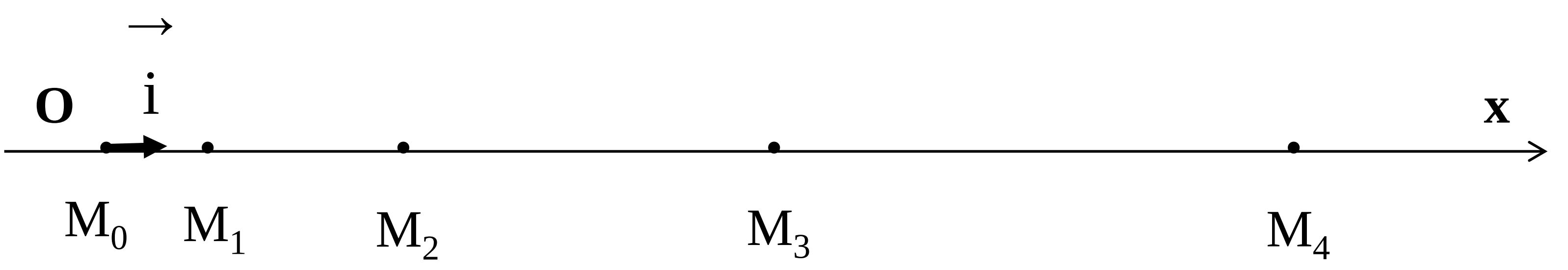
- trouvé la loi horaire x(t)

- montré que la vitesse est la dérivée de la fonction x(t) par rapport au temps

MOUVEMENT RECTILIGNE ACCELERRE

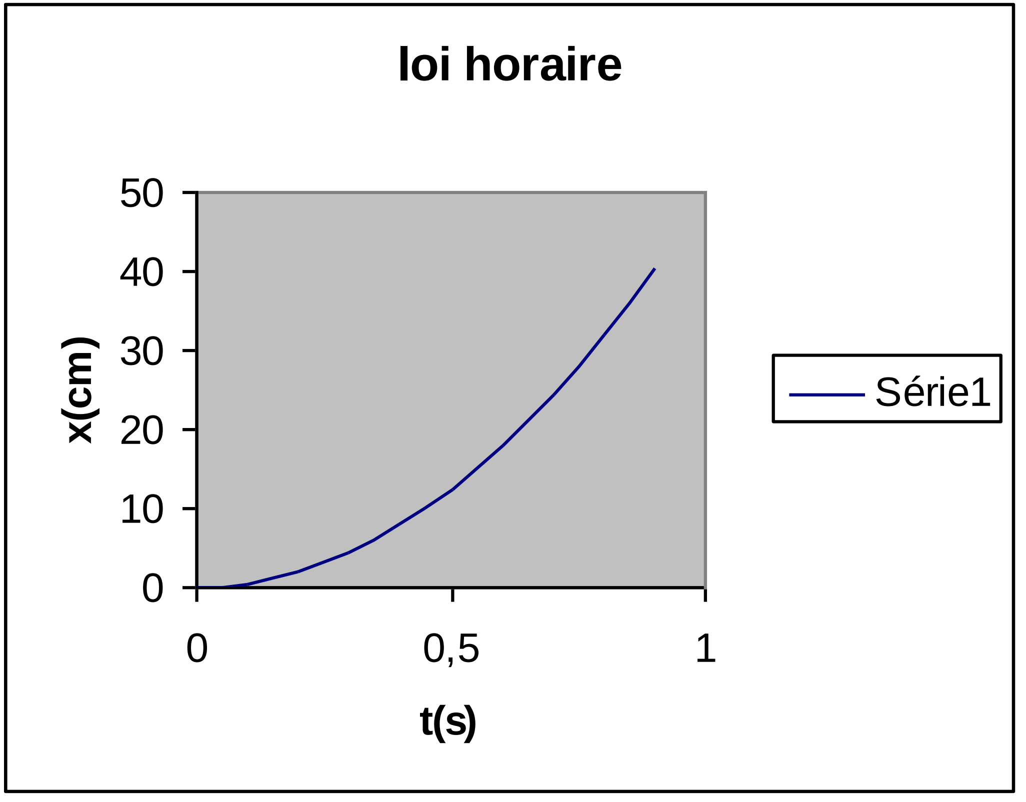
Loi horaire: $x = 50 \times t^2$

points	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
t (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8
x (cm)	0	2	8	18	32

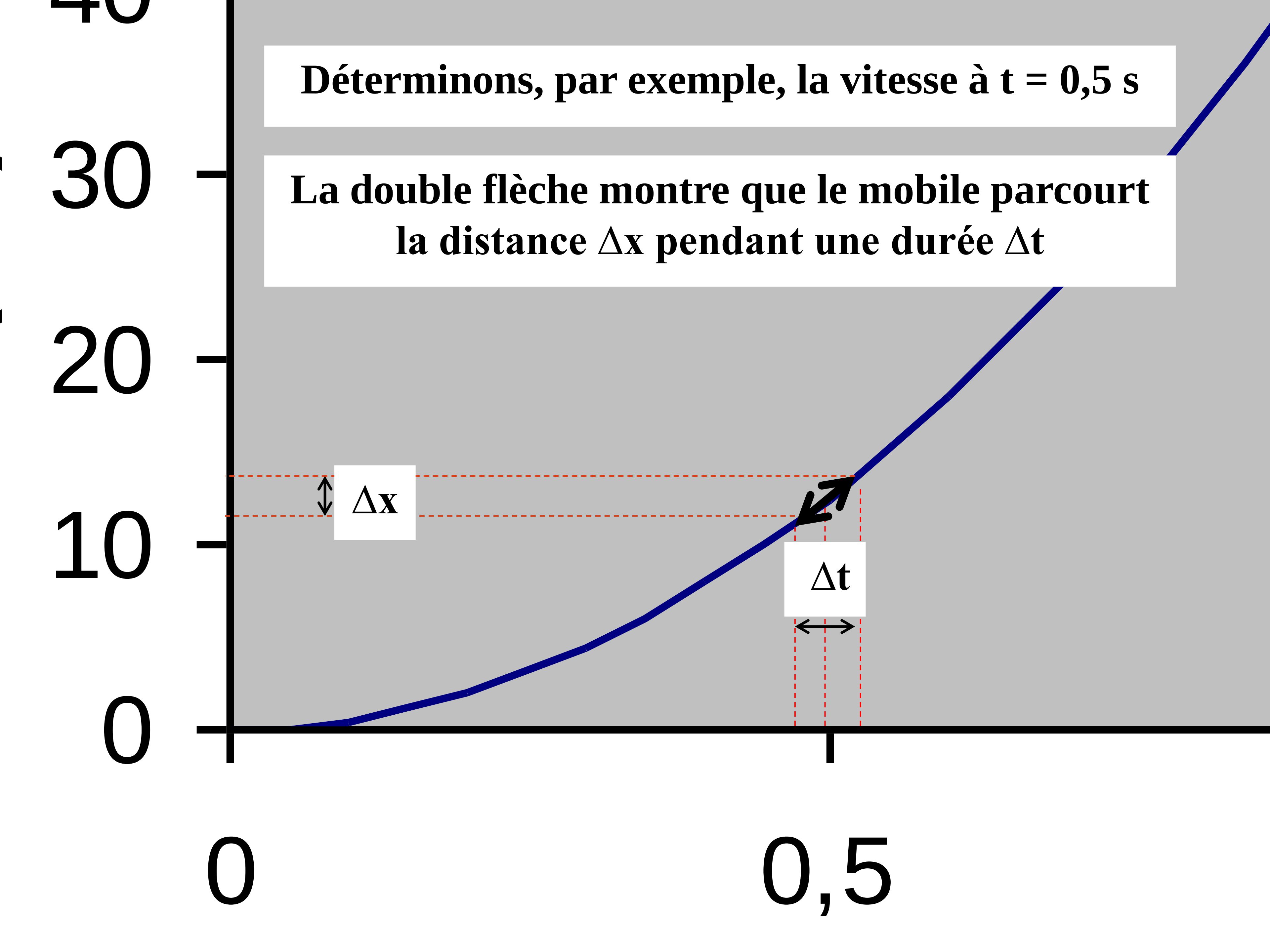


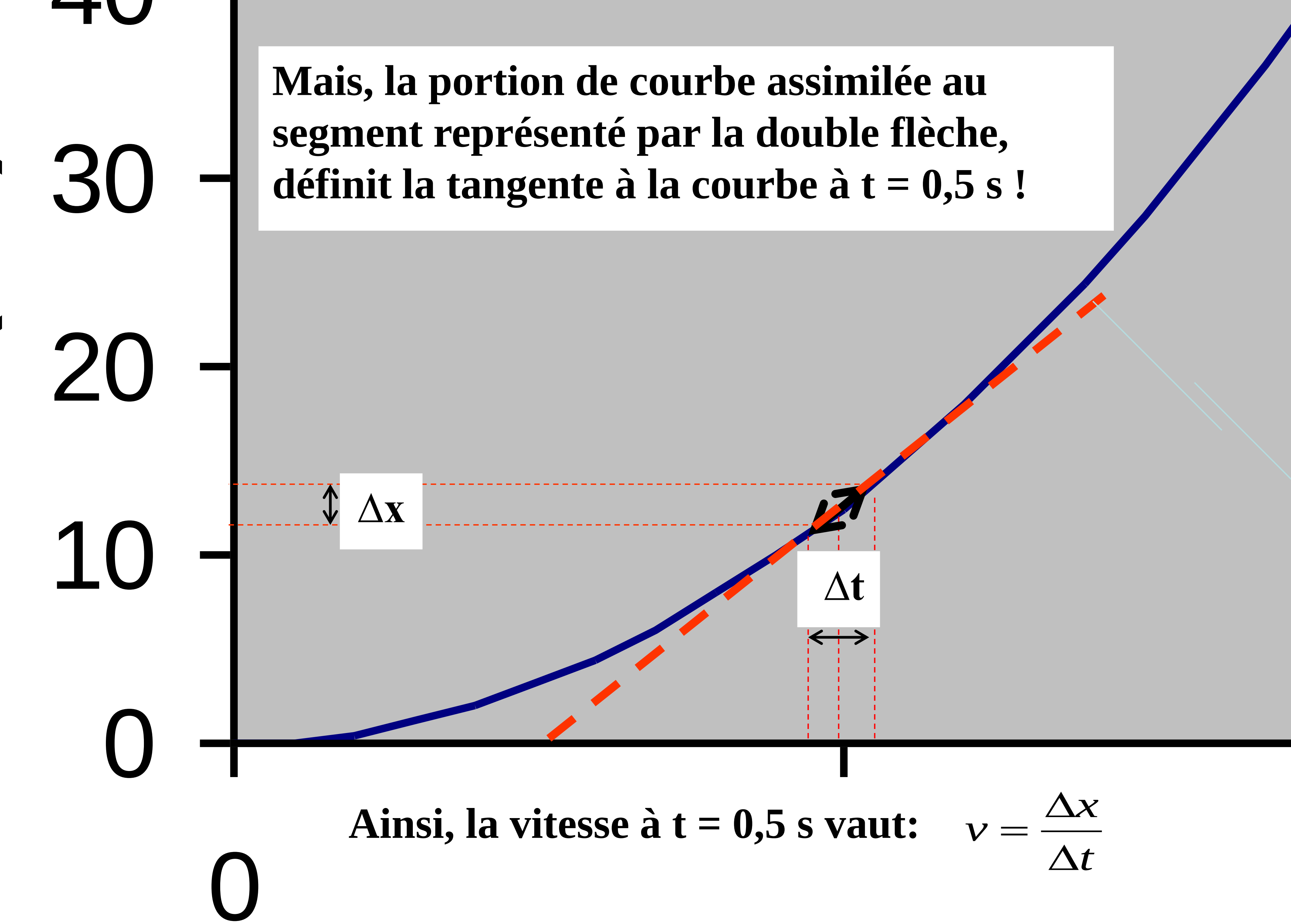
Mouvement rectiligne accéléré

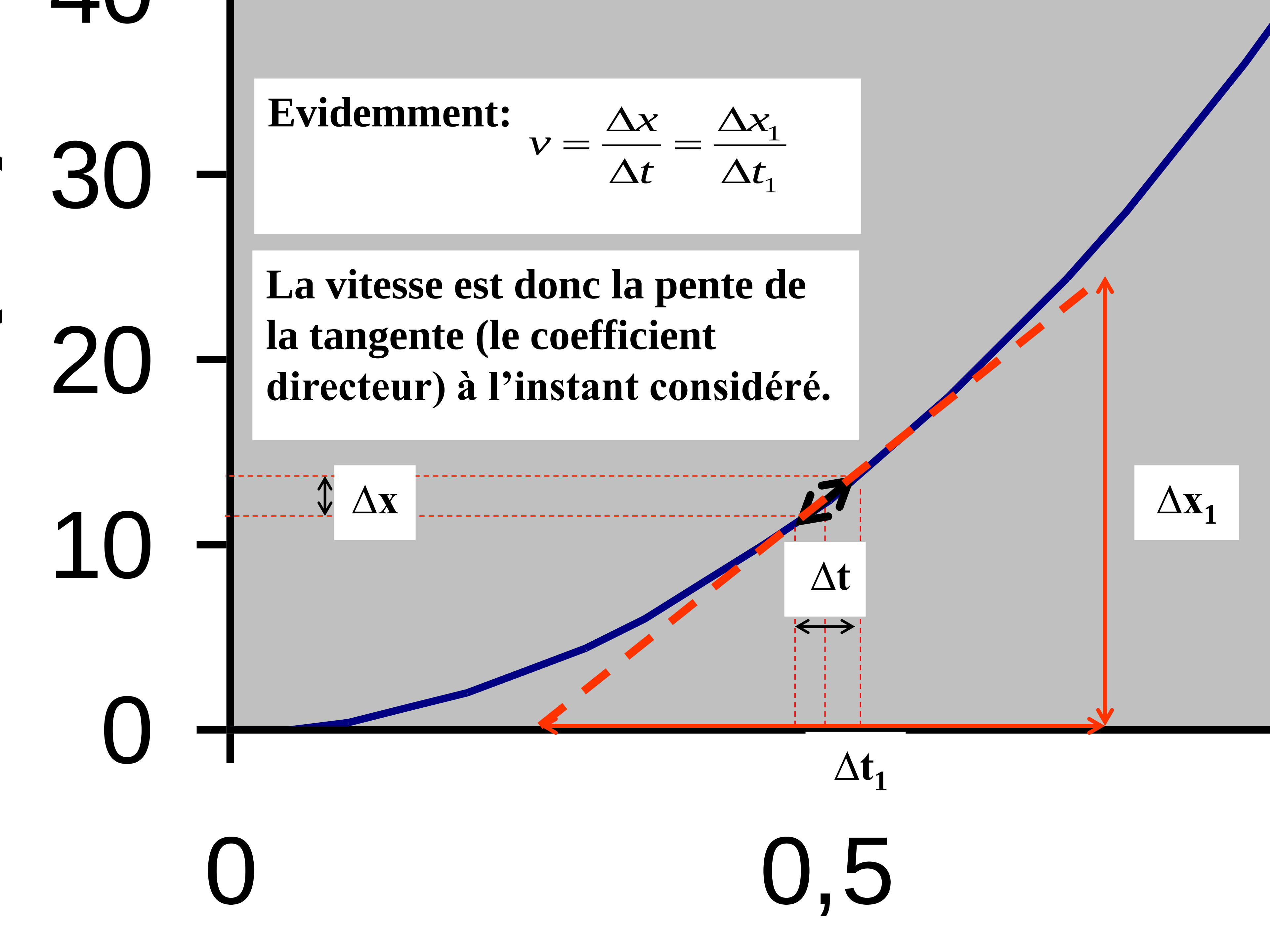
Traçons la courbe de x = f(t)



Comment déterminer la vitesse à un instant donné, celle-ci augmentant au cours du temps?


Déterminons, par exemple, la vitesse à t = 0,5 s
La double flèche montre que le mobile parcourt la distance Δx pendant une durée Δt
Δx
Δt
0
10
20
30
40
0
0,5


Mais, la portion de courbe assimilée au segment représenté par la double flèche, définit la tangente à la courbe à t = 0,5 s !
40
30
20
10
0
Δx
Δt
0
Ainsi, la vitesse à t = 0,5 s vaut: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$


Evidemment: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$
La vitesse est donc la pente de la tangente (le coefficient directeur) à l'instant considéré.
Δx
Δt
Δx1
Δt1
40
30
20
10
0
0
0,5

Ainsi, pour un mouvement rectiligne de loi horaire x = f(t), la vitesse est donnée à chaque instant par la dérivée de la fonction f(t) par rapport au temps: v = f'(t)

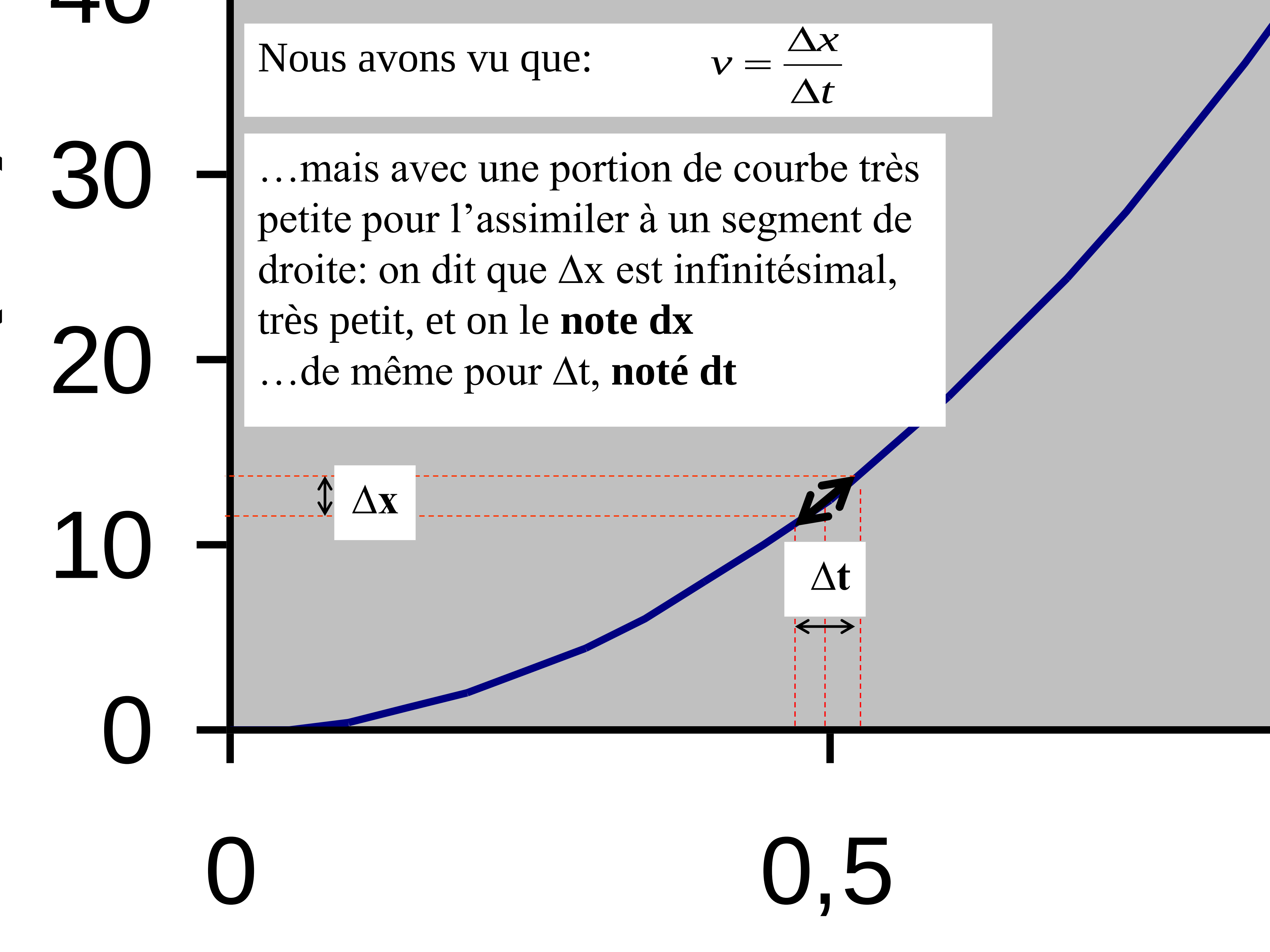
La vitesse est aussi la pente de la tangente à la courbe représentative de x = f(t) à l'instant considéré.

Cependant nous n'utiliserons plus la notation f'(t) pour la dérivée, mais la notation mathématique suivante:

$$f'(t) = \frac{dx}{dt}$$

lire « dx sur dt » et comprendre ***dérivée de x par rapport au temps***

Mais pourquoi cette notation?


Nous avons vu que: $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
…mais avec une portion de courbe très petite pour l'assimiler à un segment de droite: on dit que Δx est infinitésimal, très petit, et on le **note dx**
…de même pour Δt, **noté dt**
Δx
Δt
30
20
10
0
0
0,5

On écrit aussi que:

$\frac{dx}{dt}$ « est la *limite de* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ lorsque Δt (et donc Δx) tend vers 0 »

qui s'écrit: $$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ce qui est d'ailleurs la définition mathématique de la dérivée d'une fonction

Souvenez vous en maths…

pour $y = f(x)$ on définit $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

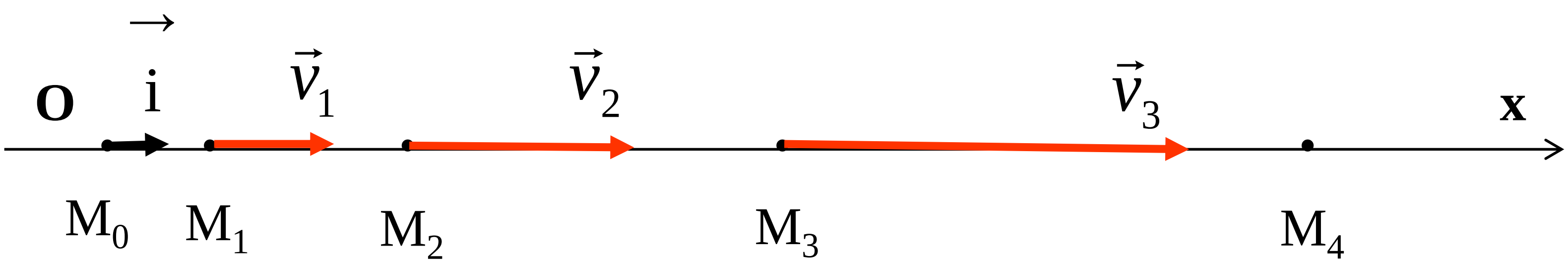
Nous avons donc abordé la notion de **loi horaire**, de **vitesse instantanée,** et de **vecteur vitesse** pour deux exemples de mouvements rectilignes.

Abordons la notion d'**accélération** pour des mouvements rectilignes

Loi horaire: $x = 10\times t^3 + 20\times t$ (x en cm; t en s)

vitesse: $v = dx/dt = 30\times t^2 + 20$ (v en cm.s^{-1}; t en s)

points	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
t (s)	0	1	2	3	4
x (cm)	0	30	120	330	720
v (cm.s^{-1})	20	50	140	290	500



(échelles x et v arbitraires)

Mouvement rectiligne accéléré

Notion d'accélération

La vitesse du mobile passe de 20 cm/s à 500 cm/s en 4 seconde.

points	M_0	M_4
t (s)	0	4
x (cm)	0	720
v ($cm.s^{-1}$)	20	500

On peut définir une accélération moyenne entre M_0 et M_4 par :

$$a = \frac{v_4 - v_0}{t_4 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{500 - 20}{4 - 0} = 120... \qquad \mathbf{cm.s^{-1}/s}$$

a = 120 $cm.s^{-1}$/s veut dire **qu'en moyenne** la vitesse augmente de 120 $cm.s^{-1}$ à chaque seconde entre M_0 et M_4; on note **a = 120 $cm.s^{-2}$**

Vitesse et accélération

De même que la vitesse rend compte de la variation de la position du mobile au cours du temps, l'accélération rend compte de la variation de la vitesse au cours du temps

Du reste les expressions mathématiques le montrent bien:

Vitesse moyenne: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ accélération moyenne: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

L'accélération est à la vitesse ce que la vitesse est à la position du mobile

Vitesse et accélération

Mais nous avons défini la vitesse instantanée par :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

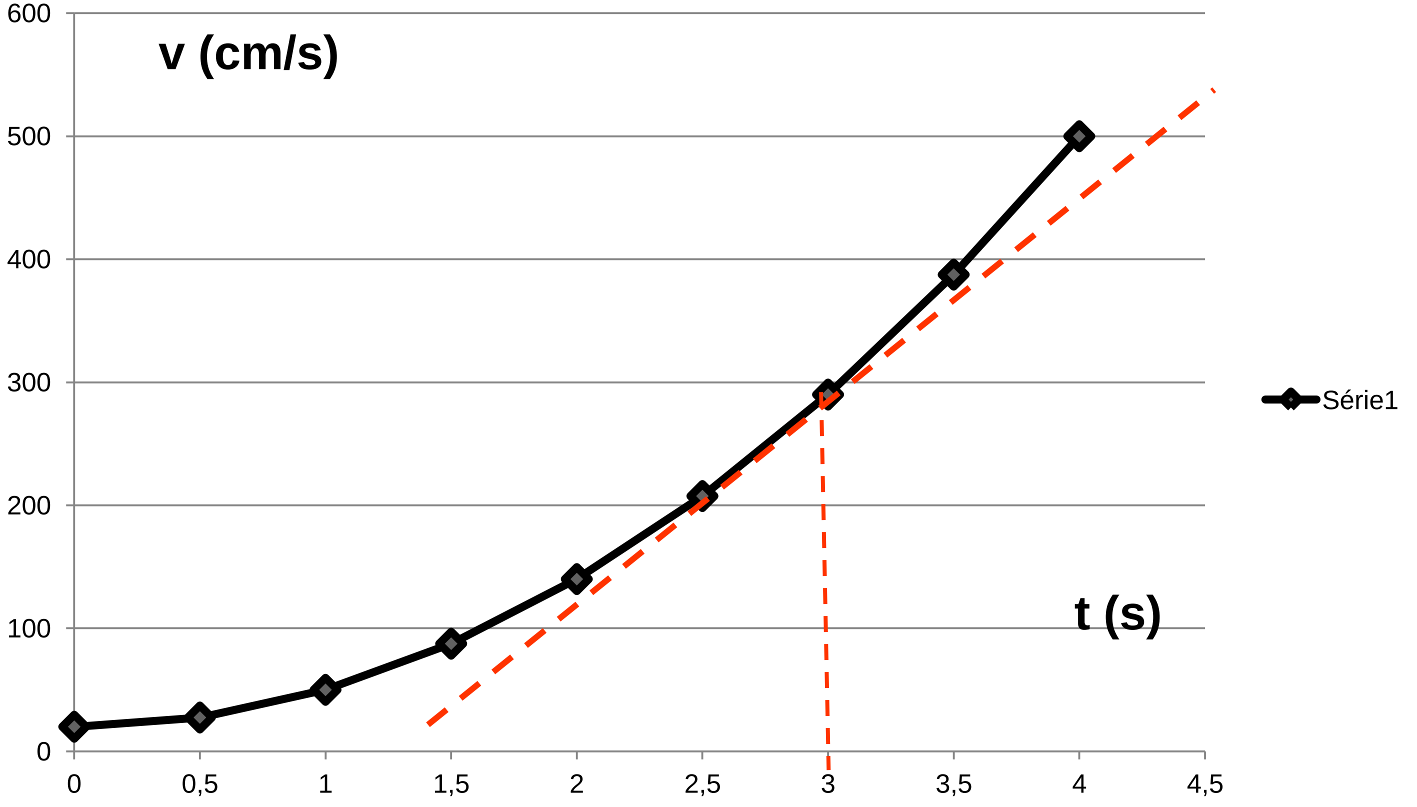
De même, l'accélération instantanée est définie par:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Comme pour la vitesse, l’accélération est également la pente de la tangente à la courbe de v = f(t) à l’instant considéré:

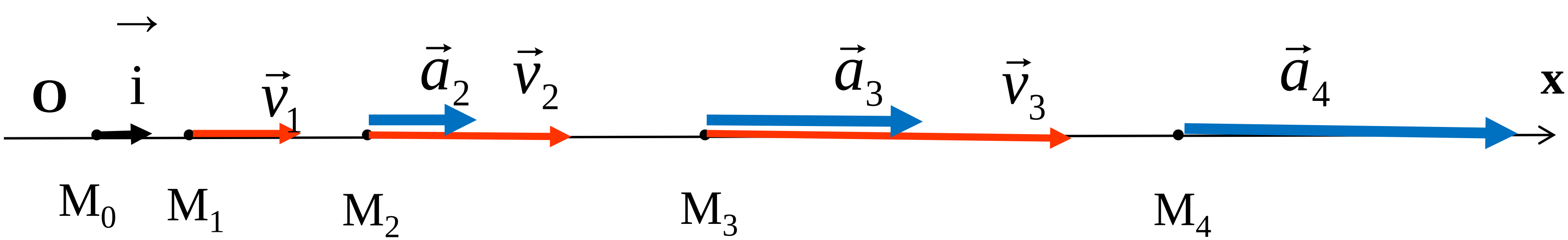


Ainsi, dans notre exemple:

Loi horaire: $x = 10\times t^3 + 20\times t$ (x en cm; t en s)

vitesse: $v = dx/dt = 30\times t^2 + 20$ (v en $cm.s^{-1}$; t en s)

accélération: $a = dv/dt = 60\times t$ (a en $cm.s^{-2}$; t en s)



(échelles x, v et a arbitraires)

Enfin, notons que si

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Alors: a est la dérivée seconde de x par rapport au temps…

…que nous noterons:

$$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

lire « d 2 x sur dt 2 » et comprendre

dérivée seconde de x par rapport au temps

Mouvements plans

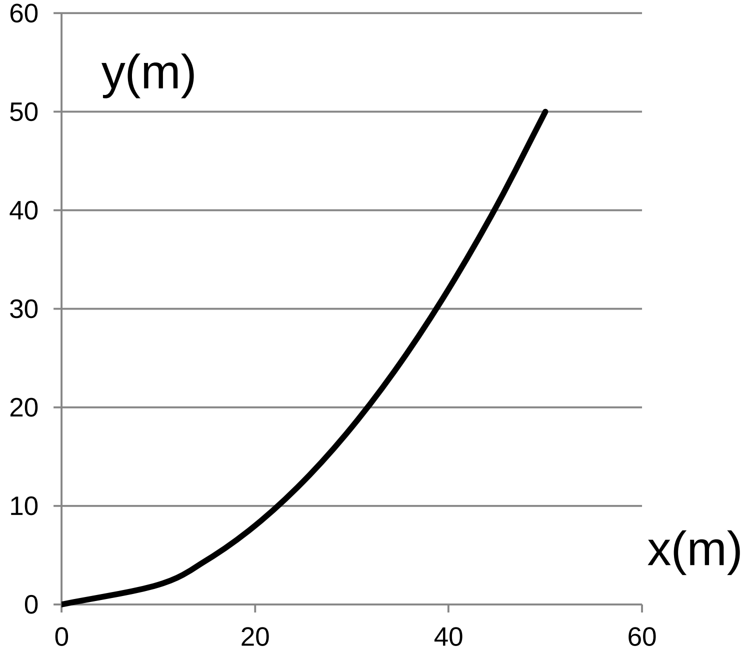
Jusqu'ici, nous avons introduit, dans le cas des mouvements rectilignes, les définitions mathématiques de la vitesse et de l'accélération avec des <u>scalaires</u> (x, v et a).

L'étude d'un mouvement plan nécessite l'introduction de définitions plus générales et <u>vectorielles</u> (faisant intervenir $\vec{v}$ et $\vec{a}$).

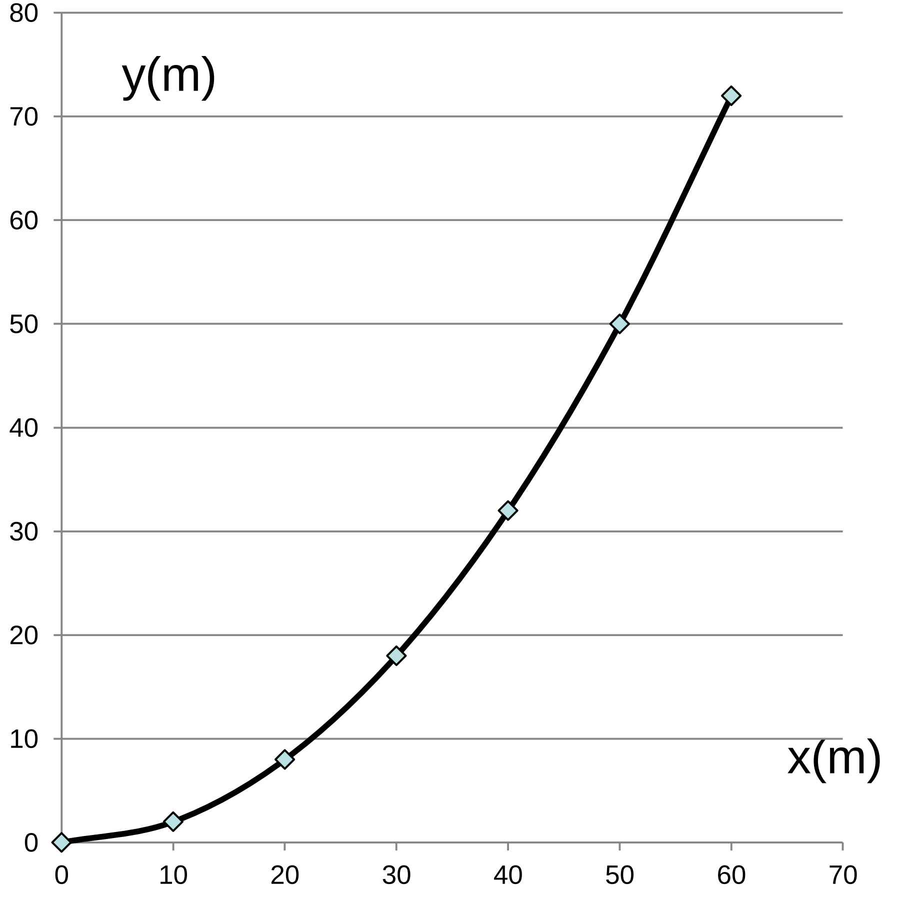
Etude d'un exemple

Loi horaire par rapport à un repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$:

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 10t \\ y = 2t^2 \end{pmatrix}$$ (x et y en m; t en s)



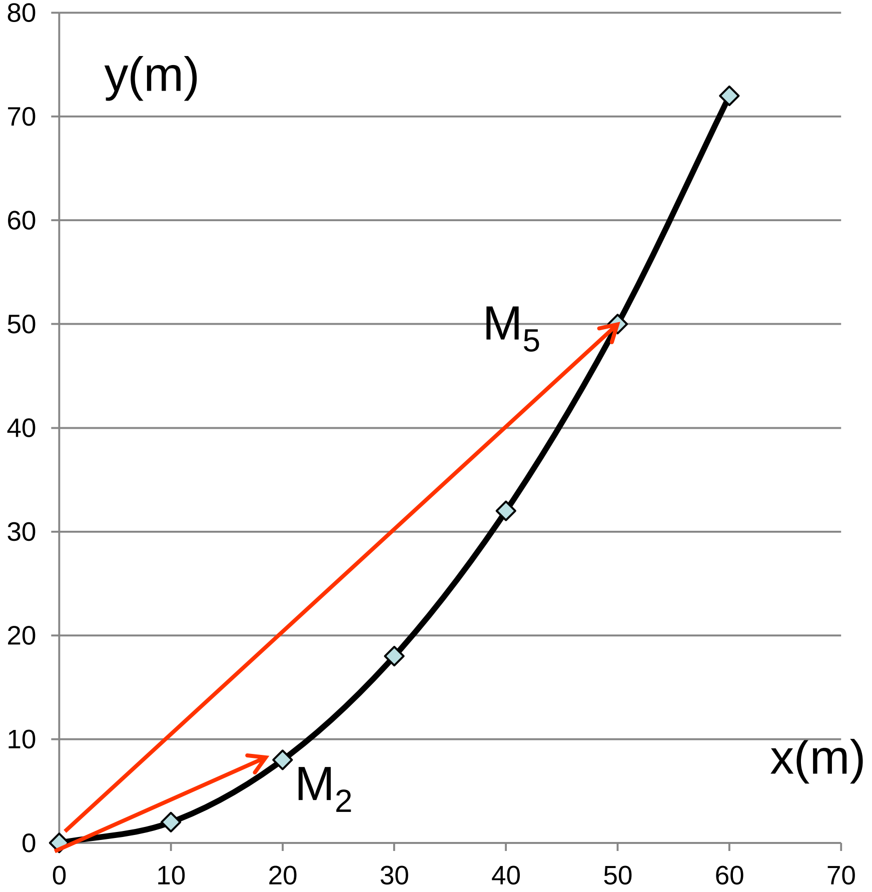
points	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
t (s)	0	1	2	3	4
$x = 10t$ (m)	0	10	20	30	40
$y = 2t^2$ (m)	0	2	8	18	32



A chaque instant, la position du mobile est repérée par le vecteur

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 10t \\ y = 2t^2 \end{pmatrix}$$ appelé vecteur position

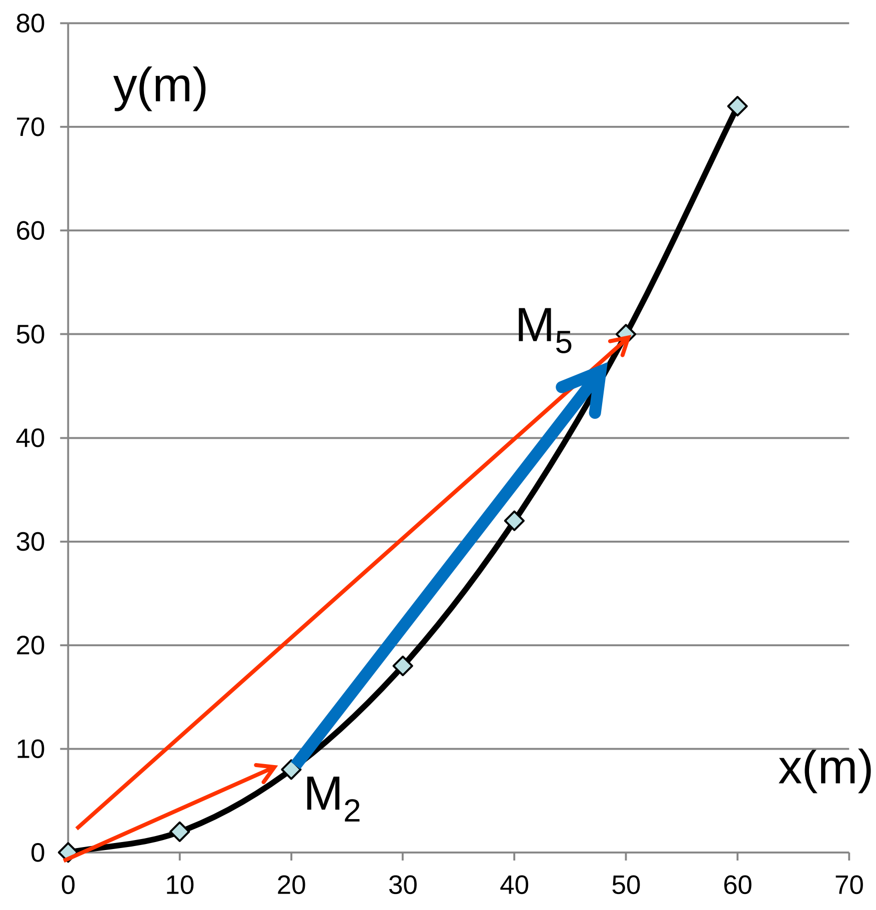
Par exemple à $t_2 = 2s$ et $t_5 = 5s$:



Entre les instants t_2 et t_5 , le vecteur position varie de:

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_2}$$

Il s'agit donc de faire une soustraction de deux vecteurs:



En effet:

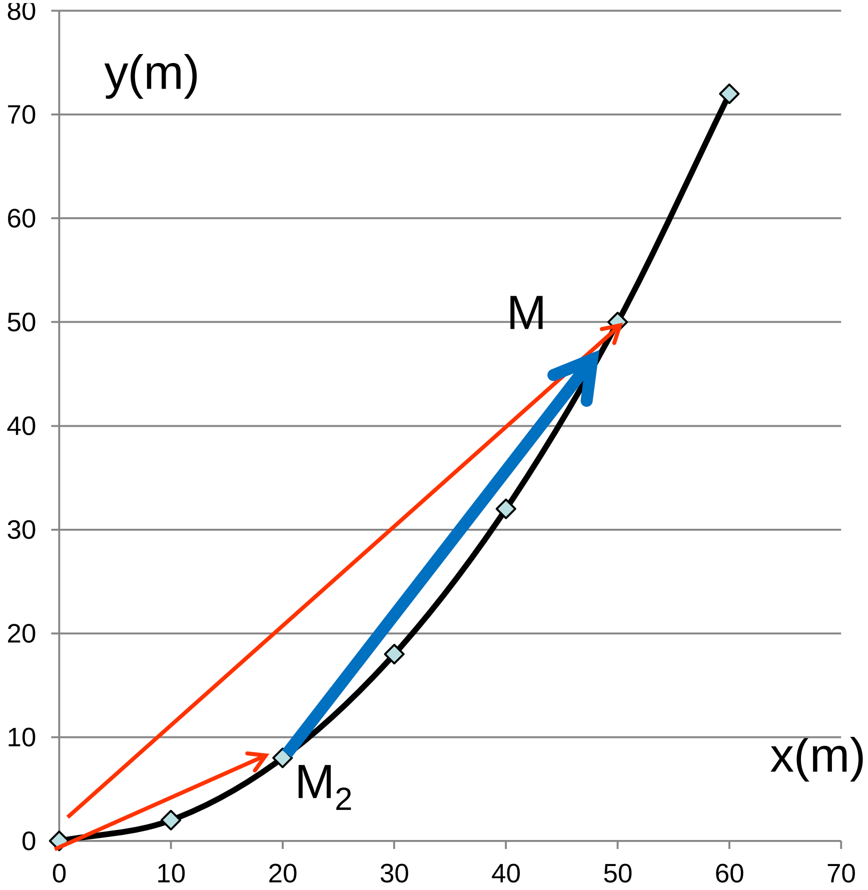
$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_2}$$

$$= \overrightarrow{OM_5} + \overrightarrow{M_2O} = \overrightarrow{M_2O} + \overrightarrow{OM_5}$$

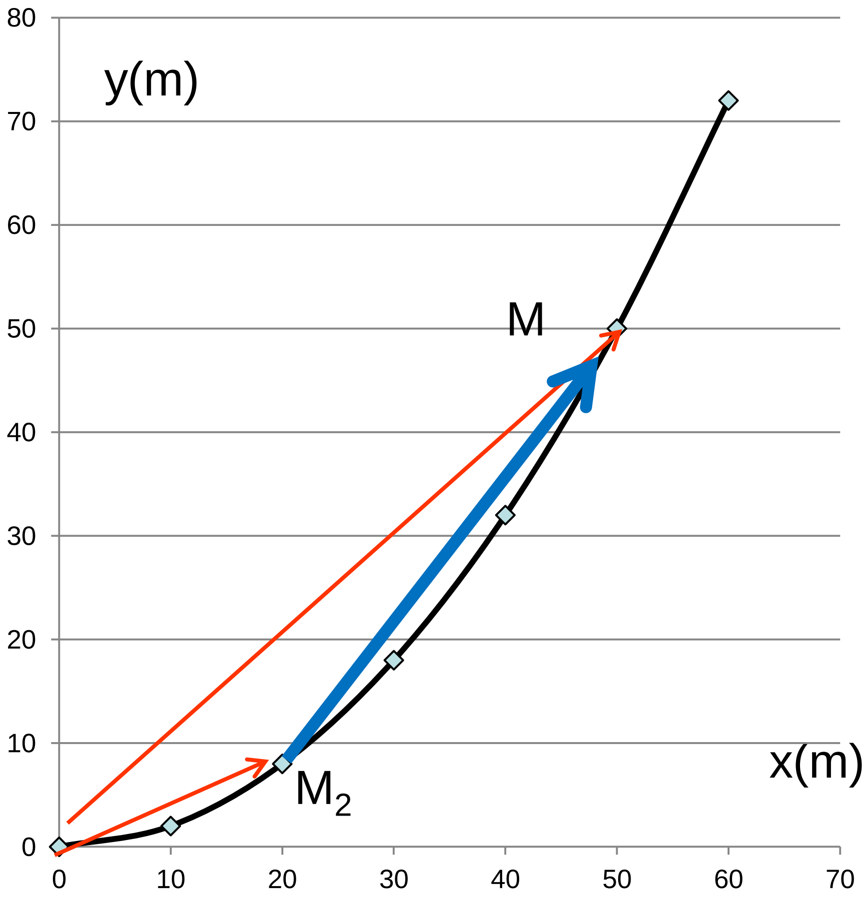
$$= \overrightarrow{M_2M_5}$$

Mais cette définition n'est pas très pertinente car nous ne prenons pas en compte exactement la distance parcourue par le mobile le long de la trajectoire et le mobile en M_2 ne se déplace pas exactement vers M_5 mais en suivant la trajectoire.

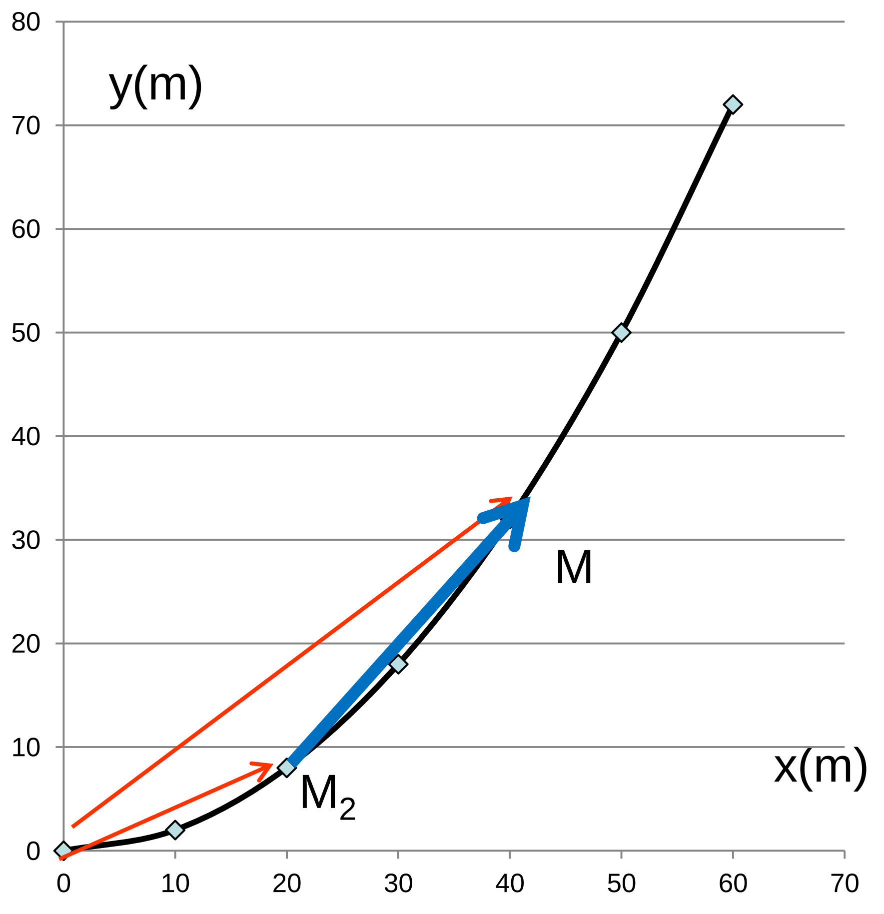
Pour définir le vecteur vitesse instantanée en M_2 par exemple, faisons tendre Δt vers 0 ! Faisons tendre le point M vers M_2 …



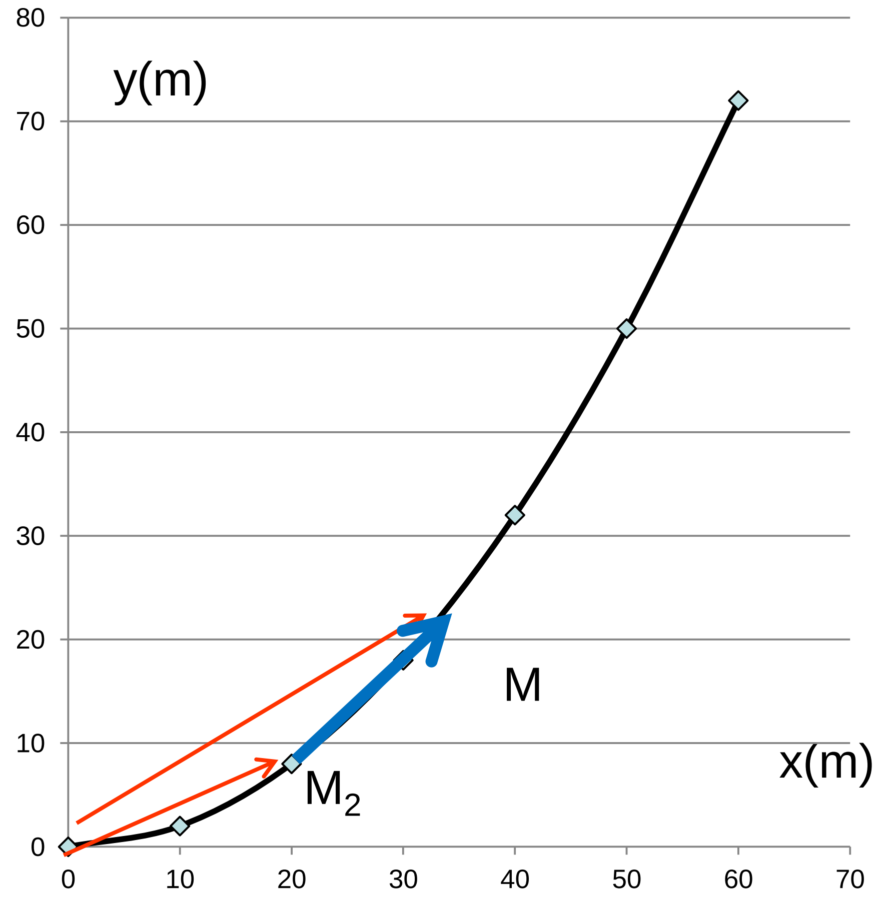
$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{M_2M_5}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$



y(m)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
M
M_2
x(m)
0
10
20
30
40
50
60
70

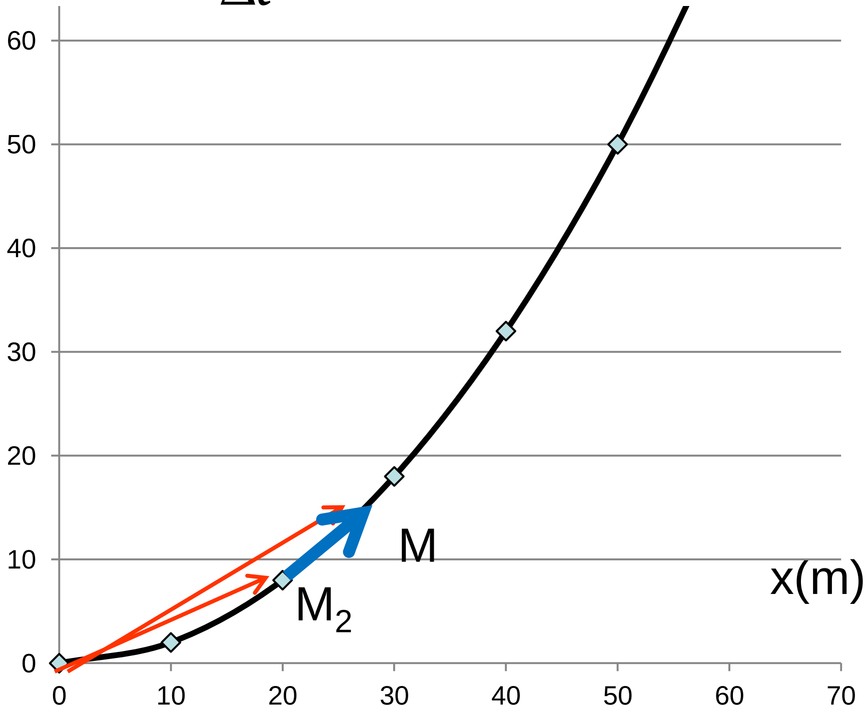


y(m)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
M
M2
x(m)
0
10
20
30
40
50
60
70



y(m)
x(m)
M
M_2
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70

Plus M se rapproche de M_2, plus le vecteur $\overrightarrow{M_2M} = \Delta\overrightarrow{OM}$ « se rapproche de la trajectoire » et $\vec{v} = \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$ devient une définition du vecteur vitesse très honorable !



En outre, la direction de $\overrightarrow{M_2M}$, donc celle de $\vec{v}$, tend vers la tangente à la trajectoire en M_2 …

On retrouve une propriété connue: $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

Ainsi, de même que pour une fonction scalaire x(t) on avait :

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ = dérivée de x(t) par rapport à t

On définit la dérivée d'un vecteur :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$ = dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à t

Mais comment trouver l'expression de la vitesse $\vec{v}$
en fonction de t à partir de la loi horaire ?

On peut montrer facilement que dans notre repère orthonormé, on a :
essayez!

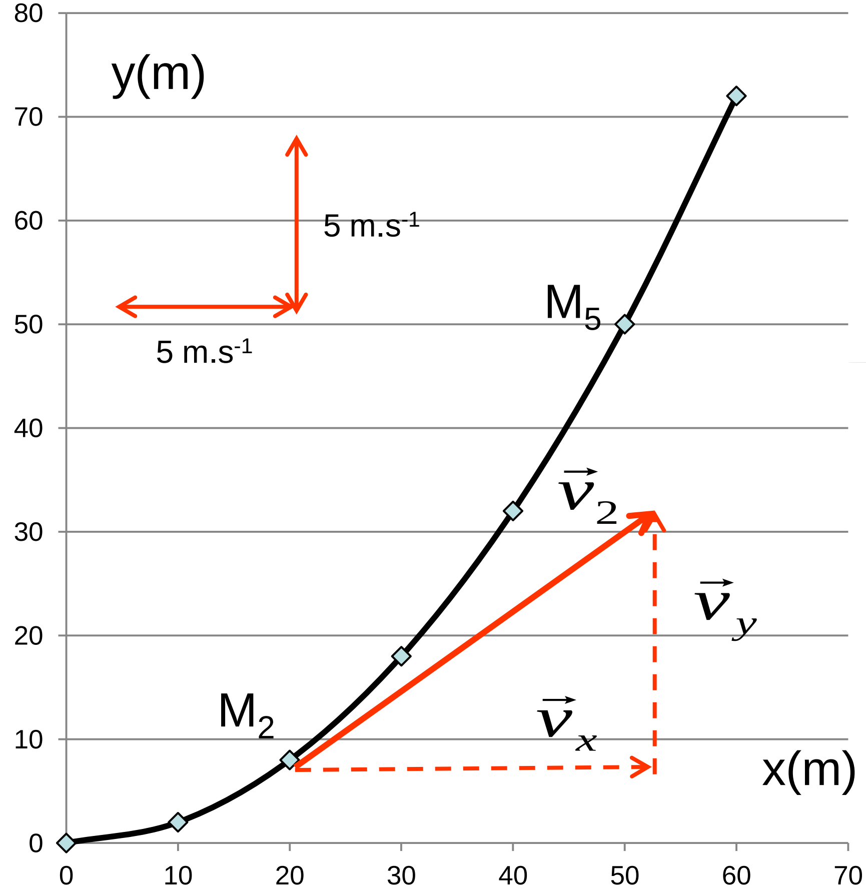
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{pmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

Voyons notre exemple:

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 10t \\ y = 2t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} v_x = 10 \\ v_y = 4t \end{pmatrix}$$

Voyons deux exemples: $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = 10 \\ v_y = 4t \end{pmatrix}$ donc

points	M_2	M_5
t (s)	2	5
v_x ($m.s^{-1}$)	10	10
v_y ($m.s^{-1}$)	8	20



Traçons $\vec{v}_2$:

- choisissons une échelle de vitesse
- traçons $\vec{v}_x$ (10 $m.s^{-1}$)
- traçons $\vec{v}_y$ (8 $m.s^{-1}$)
- traçons $\vec{v}_2 = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

$\vec{v}_2$
- P^t d'application: M_2
- Di^{tion}: tangente à la trajectoire
- Sens: celui du m^{vt}
- Valeur: $v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ =12,8 m/s

Nous définissons de la même façon le vecteur accélération:

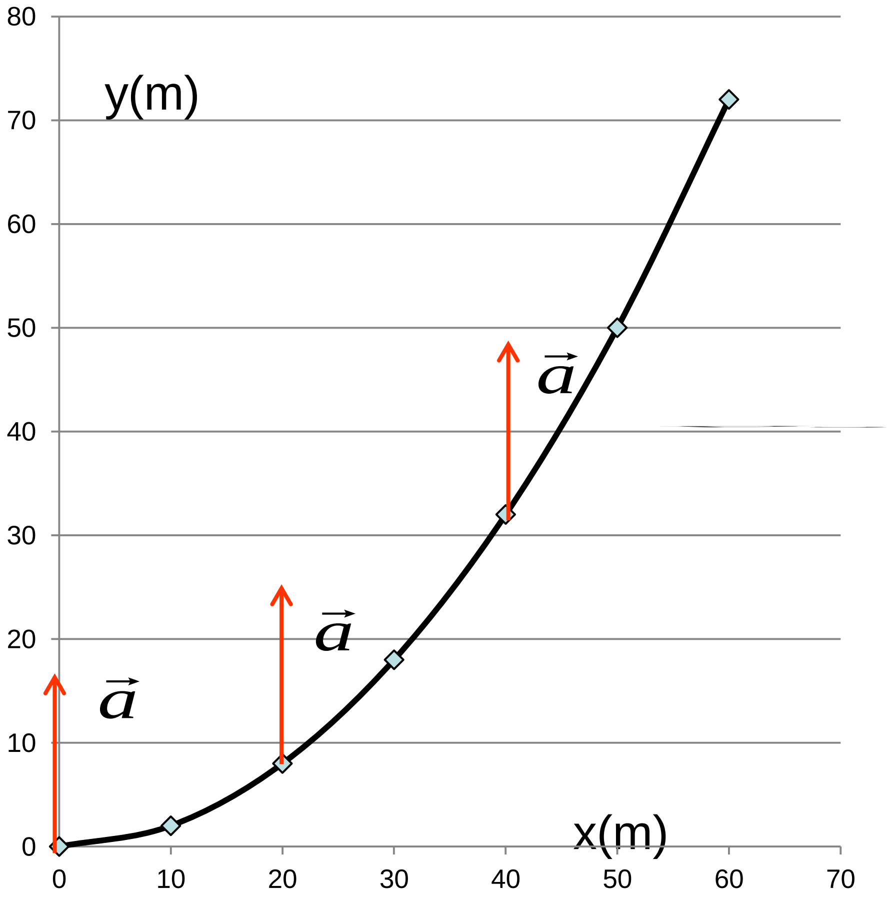
$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{pmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\begin{pmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{pmatrix}}$$

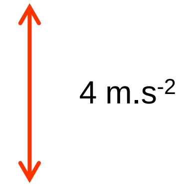
Voyons notre exemple:

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x = 10t \\ y = 2t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} v_x = 10 \\ v_y = 4t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{C^{te}}$

$\vec{a}$
- P^t d'application: M
- Di^{tion}: parallèle à Oy
- Sens: suivant orientation de l'axe Oy
- Valeur: a = 4 $m.s^{-2}$





Le *nécessaire et le suffisant* pour être opérationnel…

Vecteur position (loi horaire): $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse: $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Vecteur accélération: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{pmatrix}$

donc aussi $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$